1.2.2. EPREUVE DE MATHEMATIQUES-SERIE D

RÉPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAURÉAT

2016 – **MATHÉMATIQUES**
Série : D
Durée : 4 heures
Coef. : 4

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une seule réponse par question est acceptée et aucune justification n'est demandée. Indiquer sur votre copie le numéro de la question suivi du numéro de la réponse choisie (A ; B ; C ou D) sans justifier votre choix .

N°	Enoncés des questions	Réponses proposées	
1	On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$ La valeur moyenne de la fonction f dans l'intervalle $[\![0 ; 2]\!]$ est égale à :	A	$\frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$
		B	$\frac{e^{-2}}{2}$
		C	$\frac{1}{2}(1 + e^{-2})$
		D	$\frac{1}{2}(1 - e^{-2})$
2	On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = xlnx$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(o ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$. Une équation de la tangente au point d'abscisse e est :	A	$y = 2x - e$
		B	$y = \frac{1}{e}x + e - 1$
		C	$y = ex + 1$
		D	$y = e$
3	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(3x) + x$ a pour expression :	A	$F(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{x^2}{2}$
		B	$F(x) = -3\cos(3x) + 1$
		C	$F(x) = \sin(3x) + \frac{x^2}{2}$
		D	$F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{x^2}{2}$
4	Une solution de l'équation différentielle $y' + y = x + 1$ a pour expression :	A	$f(x) = e^{-x} + 1$
		B	$f(x) = e^{-x} + x$
		C	$f(x) = x + 1$
		D	$f(x) = e^{-x} + x + 1$
5	Soit E , F , G trois points distincts du plan complexe d'affixes respectives Z_E ; Z_F ; Z_G . On sait que $\frac{Z_G - Z_E}{Z_F - Z_E} = 3i$. On peut en déduire que :	A	Les points E , F et G sont alignés
		B	EFG est un triangle rectangle en E
		C	EFG est un triangle rectangle isocèle en E
		D	EFG est un triangle équilatéral.

EXERCICE 2 (4 points)

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormal direct de l'espace.

1-) Soit G l'isobarycentre des points A , B et C .

a) Donner les coordonnées du point G.
b) Montrer que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (ABC).

2-) On considère les points A'(2 ; 0 ; 0) ; B'(0 ; 2 ; 0) ; C'(0 ; 0 ; 3). Ces points distincts définissent un plan noté (A' B' C') .

a) Déterminer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ et en déduire qu'une équation cartésienne du plan (A' B'C') est $3x + 3y + 2z = 6$.
b) Montrer que le point M(x ; y ; z) appartient à la droite (AC) si , et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$
c) Calculer alors les coordonnées du point P commun à la droite (AC) et au plan (A' B' C').

PROBLEME (11 points)

Partie A. Signe d'une fonction par lecture graphique

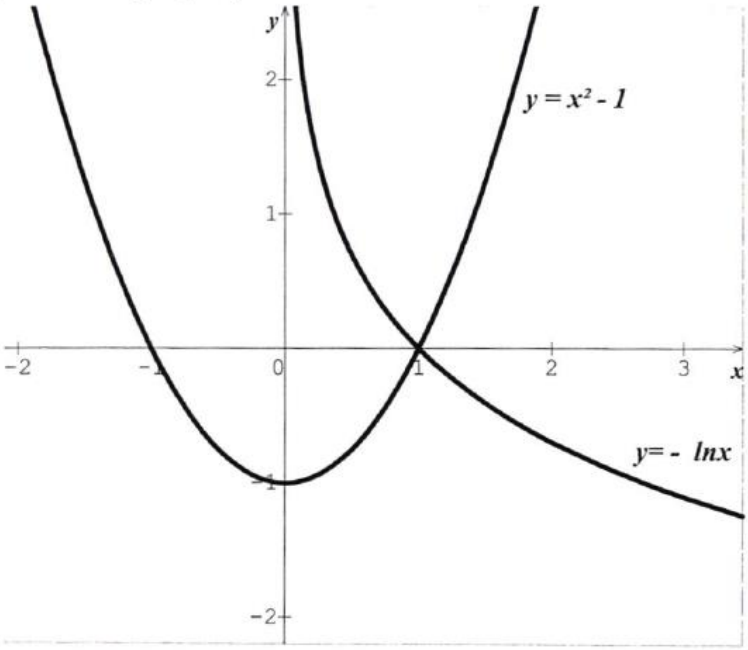
On considère les fonctions

$u: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 1 \qquad x \mapsto -\ln(x)$

1) A l'aide des représentations graphiques ci-contre, comparer $u(x)$ et $v(x)$ suivant ses valeurs strictement positives de x

(On se contentera d'une lecture graphique)



2) Des lectures graphiques précédentes, déduire que :

a) $\forall x \in]0\,;1[,\quad x^2 - 1 + \ln(x) < 0$.

b) $\forall x \in]1\,;+\infty[,\ x^2 - 1 + \ln(x) > 0$.

Dans toutes la suite du problème , <u>on admettra ces résultats.</u>

<u>Partie B :</u> Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{lnx}{x}$

1-) Variation de f

a) Calculer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$
b) Justifier que f est dérivable sur$]0;+\infty[$, puis calculer la dérivée $f\,'$de f.
c) Etudier le signe de $f\,'(x)$ suivant les valeurs de .
d) En déduire les sens de variation de f.
e) Dresser le tableau de variation complet de f.

2-) Représentation graphique de la fonction f

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) (unité graphique 2cm) .

On désigne par (C_f) la représentation graphique de la fonction f.

a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C_f) .

b) Trouver les coordonnées du point d'intersection A de (Δ) et de (C_f) .

c) Montrer qu'il existe un point B de (C_f) où la tangente à (T) à (C_f) est parallèle

à (Δ) ; trouvez les coordonnées du point B.

d) Sachant que $e \simeq 2{,}72$; $\frac{1}{e} \simeq 0{,}34$; $ln(2) \simeq 0{,}69$, compléter, après l'avoir reproduite, la table des valeurs ci-dessous.

x	0,25	0,5	1	e	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$					

e) Tracer (T) et (Δ) , puis construire (C_f) .

3) Etude d'une bijection

a) On considère la fonction $g\ :\ [1\ ;\ e] \to f([1\ ;\ e])$

$$x \mapsto f(x)$$

Préciser l'ensemble d'arrivée de g sous forme d'intervalle, puis montrer que g est une bijection.

b) On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g, représenter graphiquement g et g^{-1}, avec des couleurs différentes, dans le même repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).

<u>Partie C :</u> Calcul d'aire

1) A l'aide du graphique réalisé dans la question 2-d de la partie B, donner les positions relatives de (C_f) et de (Δ) dans l'intervalle $[1\ ;\ e]$.
2) Vérifier, par le calcul, les résultats obtenus à la question 1- C ci-dessus.
3) Calculer en cm² l'aire de la surface du plan délimitée par (C_f) , (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.