1.1.EPREUVE DE MATHEMATIQUES-SERIE D

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2015 – MATHEMATIQUES
Séries : D
Durée : 4 heures
Coef. : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé

Exercice 1 (5 points)

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions de l'équation différentielle

$(E): \; y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 9x^2 + 6x.$

1) Soit h un polynôme défini par $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a , b, c et d sont des réels.
   Déterminer a, b, c et d tels que h soit solution de (E).
2) On pose $F = f - h$.
   a) Démontrer que si f est solution de (E) alors F est solution de $(E') : y'' - 3y' + 2y = 0$.
   b) Réciproquement démontrer que si F est solution de (E') alors f est solution de (E).
3) Résoudre l'équation différentielle (E') .
4) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) .
5) Déterminer la solution particulière de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à une repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - 1| = |z - i|$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - 2| = 5$.
3. Soit T la transformation du plan qui à tout point M de coordonnés $(x\,;\,y)$ associe le point M' de coordonnées $(-2x + 3\,;\, -2x - 6)$.
   a) Déterminer la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.
   b) Donner l'écriture complexe de T.
4. On appelle respectivement (E_1) et (E_2) les ensembles des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifiant :
   $(E_1) : (x - 2)^2 + y^2 = 2$.
   $(E_2) : y - x = 0$.
   a) Déterminer l'image (E'_1) de (E_1) par T.
   b) Déterminer l'image (E'_2) de (E_2) par T.
5. En déduire l'ensemble des points K appartenant à (E'_1) et (E'_2) .

Problème (10 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1-x)^2 e^x$. On note (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$

(unité graphique : $2\ cm$)

Partie A : Etude de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, $f(x) = x^2 e^x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

   b) En déduire la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. a) Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que pour tout réel x , $f'(x)$ a le même signe que (x^2-1). Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie B : Etude graphique de (C_f) et calcul d'aire.

1. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 .
2. Pour tout réel , on pose : $k(x) = f(x) - (-x+1)$.
   a) Montrer que pour tout réel , $k(x) = e^x(1-x)(1-x-e^{-x})$
   b) Etudier les variations de la fonction $h: x \longmapsto 1 - x - e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Calculer $h(0)$, puis donner le signe de $h(x)$ pour tout réel x.
   d) Dresser le tableau de signe de $k(x)$ et en déduire la position relative de (C_f) et (T).
3. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (On donnera les valeurs de $f(x)$ à 10^{-1} près).

x	-5	-4	-3	-2	-1	0,5	1	1,5	2
$f(x)$									

4. Tracer avec soin dans le repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$, (T) et (C_f)
5. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
6. Soit $\mathcal{D}$ le domaine plan délimité par (C_f), (T), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On note $\mathcal{A}$, l'aire de $\mathcal{D}$.

   Hachurer proprement $\mathcal{D}$ sur la représentation graphique et calculer en cm^2 la valeur exacte de $\mathcal{A}$.