1.1.EPREUVE DE MATHEMATIQUES-SERIE A1

REPUBLIQUE GABONAISE
DIRECTION DU BACCALAUREAT

2015 – MATHEMATIQUES
Séries : A1
Durée : 3 heures
Coef. : 4

L'usage de la calculatrice est autorisé

<u>EXERCICE 1</u> : POLYNOMES, EQUATIONS ET INEQUATIONS (5 points)

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse ou une réponse fausse n'est pas sanctionnée. On ne demande pas de justifier.

Vous noterez sur votre copie le numéro de la question, la lettre et la réponse choisie.

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$

1. Son discriminant Δ est égal à :
   A : -49 B : $\frac{49}{2}$ C : 49
2. Les racines du polynôme P sont :
   A : 2 et $\frac{1}{2}$ B : -3 et $\frac{1}{2}$ C : -3 et $-\frac{1}{2}$
3. La forme factorisée de P est :
   A : $P(x) = 2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ B : $P(x) = (x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ C : $P(x) = (2x+6)(2x-1)$
4. P est strictement positif sur l'intervalle :
   A : $\left]-3\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ B : $\left]-\infty\ ;\ -3\right[\cup \left]-3\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ C : $\left]-\infty\ ;\ -3\right[\cup \left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$
5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$ est :
   A : $\left]-\infty\ ;\ -3\right[\cup \left]-3\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ B : $\left[-3\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ C : $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

<u>EXERCICE 2</u> : PROBABILITES (5 points)

Lors du deuxième tour de l'oral de mathématiques, un examinateur a une corbeille contenant 20 plaquettes indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 20.

- 15 plaquettes contiennent des questions de cours.
- 5 plaquettes contiennent des exercices portant sur une partie du programme.

Chaque candidat doit tirer au hasard, successivement et sans remise deux plaquettes de la corbeille.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de plaquettes contenant des exercices.
   a) Montrer que les valeurs prises par X sont : 0, 1 et 2.
   b) Montrer que la probabilité de ne tirer aucune plaquette contenant des exercices est $p(X=0) = \frac{21}{38}$ et celle de tirer une plaquette contenant un exercice et l'autre des questions de cours est $p(X=1) = \frac{A_5^1 \times A_{15}^1 + A_{15}^1 \times A_5^1}{380}$.
   c) Recopier et compléter le tableau de la loi de probabilités de X suivant :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{21}{38}$		

d) Calculer l'espérance mathématique de X .

3. Quelle est la probabilité que le candidat tire au moins une plaquette contenant des exercices ?

PROBLEME : ETUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE. (10 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 1 + xe^{-x+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité graphique 1 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -2 + (1-x)e^{-x+1}$.

1.
   a) Calculer : $\lim_{x \to -\infty} g(x)$
   b) Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -2$ et donner une interprétation graphique de ce résultat.
   c) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
2.
   a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty ; 2[$.
   b) Vérifier que : $0{,}14 < \alpha < 0{,}15$.
   c) En déduire que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) < 0$.

Partie B : Etude de la fonction f .

1.
   a) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 1 + \frac{x}{e^{x-1}}$ et calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x\left(-2 + \frac{1}{x} + e^{-x+1}\right)$ et calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
2.
   a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.
   b) Etudier la position relative de (D) et (C).
3. Soit f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) Calculer $f'(x)$ et en déduire que pour tout x de $]-\infty ; \alpha[$, f est strictement croissante et que pour tout x de $]\alpha ; +\infty[$, f est strictement décroissante.
   b) Dresser le tableau de variation complet de f .
4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x + 2$ est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$.

5. Tracer (D), (Δ) et (C) dans le repère $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$. Unité graphique 1 cm.

6. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -(x+1)e^{-x+1}$.
   a) Démontrer que F est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x+1}$.
   b) Calculer l'aire A du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, la courbe (C) et la droite (D).